Μαθημα 21ο No. Date 20/5/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

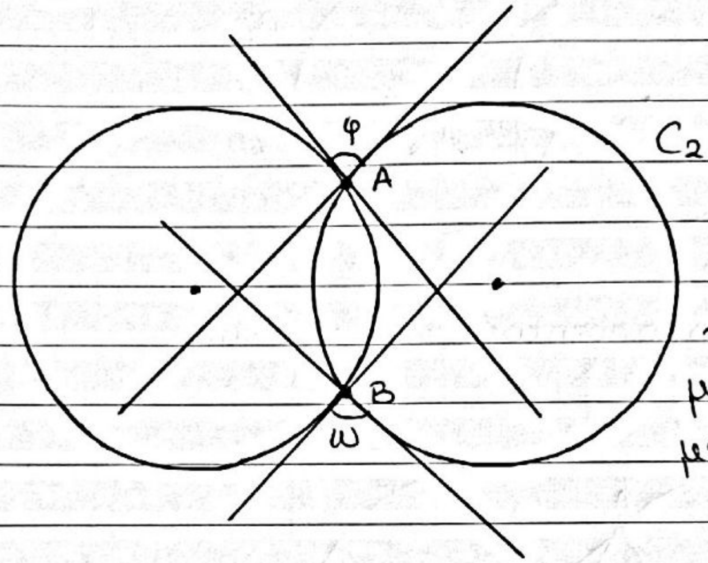
Ορθογωνιοι κυκλοι

Εστω κυκλοι οι οποιοι τεμνονται

$C_1: x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$

$C_2: x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$

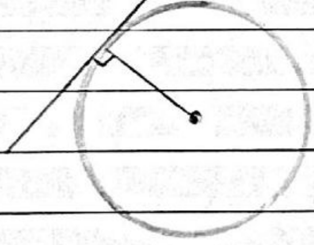
(Εστω A, B σημεια τομης)

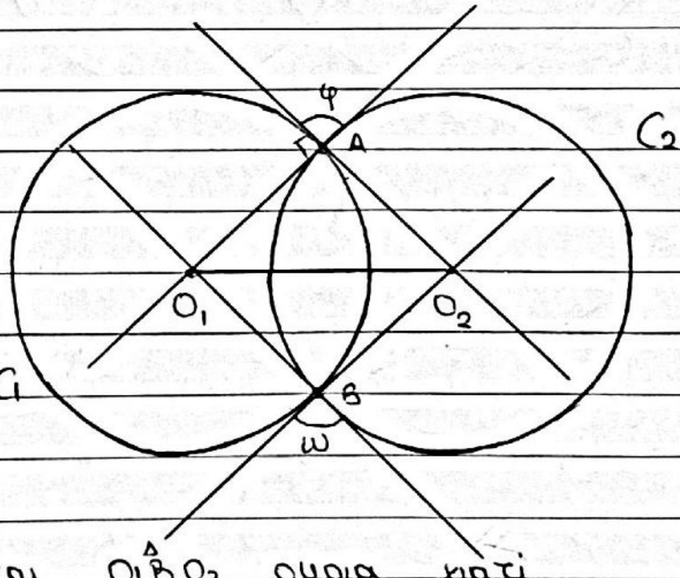


• Οριζεται ως η γωνια των δυο κυκλων η γωνια των εφαπτομενων αυτων στα σημεια τομης τους.

Αποδειξη οτι φ=ω

Είναι γνωστο οτι η ακτινα κυκλου ⊥ εφαπτομενη σε σημειο





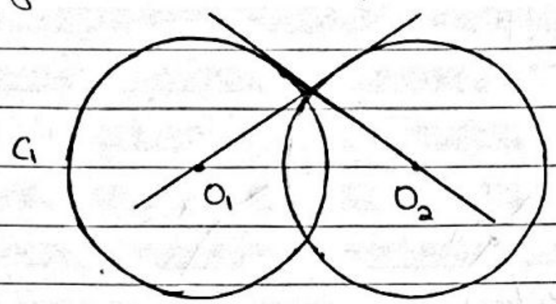
Τα τριγωνα $O_1\hat{A}O_2$ και $O_1\hat{B}O_2$ ομοια γιατι τρεις πλευρες ισες, O_1O_2 κοινη, $O_1A=O_1B$ (ακτινα C_1), $O_2A=O_2B$ (ακτινα C_2)

http://www.tanenghong.com

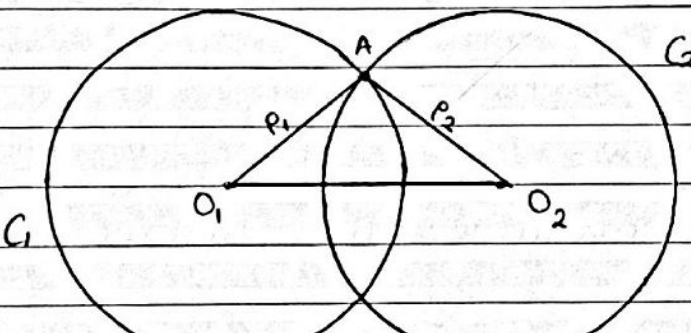
Οποτε

$\varphi + O_1\hat{A}O_2 + \cancel{2ορθες} = \omega + \cancel{2ορθες} + O_1\hat{B}O_2 \Rightarrow \varphi=\omega$

ακτινα $\perp$ εφαπτομενη $\Rightarrow$ αν οι κυκλοι μας ορθογωνιοι $\Rightarrow$ εφαπτομενες καθετες



Συνθηκη Ορθογωνιοτητας δυο κυκλων



$C_1: x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$

$C_2: x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$

$C_1 \perp C_2$

Αφου κυκλοι ορθογωνιοι $\Rightarrow$ η εφαπτομενη του C_2 στο A διερχεται απο το κεντρο του C_1 και αντιστροφα.

Κοιταμε τωρα το τριγωνο $O_1\hat{A}O_2$ ορθογωνιο $\Rightarrow (\overrightarrow{O_1O_2})^2 = \rho_1^2+\rho_2^2$ (*)

Εχουμε

$O_1\left(-\frac{A_1}{2}, -\frac{B_1}{2}\right)$, $O_2\left(-\frac{A_2}{2}, -\frac{B_2}{2}\right)$ άρα $\overrightarrow{O_1O_2} = \left(\frac{A_1-A_2}{2}, \frac{B_1-B_2}{2}\right)$

και $\rho_1^2 = \frac{A_1^2+B_1^2-4\Gamma_1}{4}$, $\rho_2^2 = \frac{A_2^2+B_2^2-4\Gamma_2}{4}$

http://www.tanenghong.com

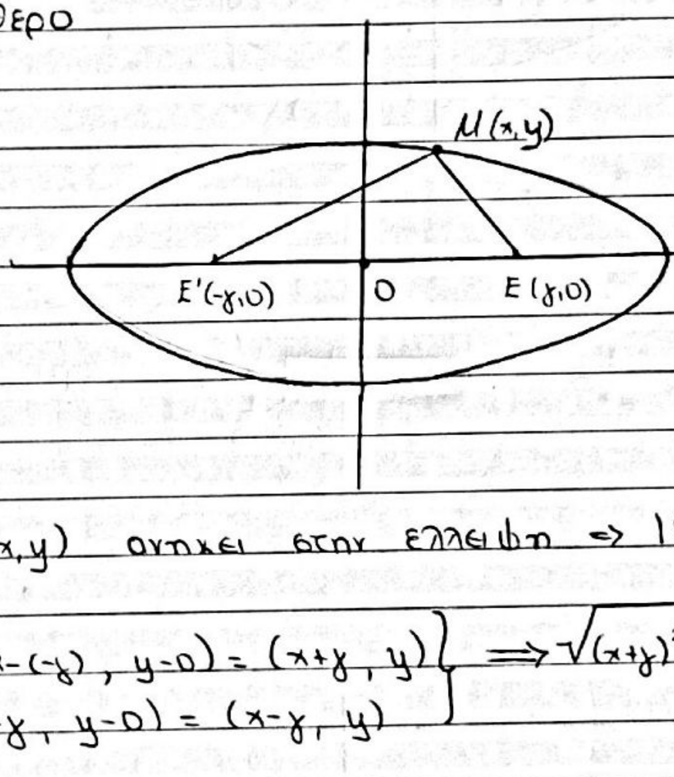
Αντικαθιστωντας λοιπον στην ⊛ θα εχουμε

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 - 2(\Gamma_1+\Gamma_2) = 0} \rightarrow \text{Συνθηκη}$$

Ελλειψη

- Εξισωση: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

- Ειναι ο γεωμετρικος τοπος των σημειων που το αθροισμα των αποστασεων τους απο δυο σταθερα σημεια ειναι σταθερο



Θεωρω το O ως μεσο του E'E

Αν $M(x,y)$ ανηκει στην ελλειψη $\Rightarrow |\vec{ME'}| + |\vec{ME}| = 2a$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{ME'} = (x-(-\gamma),\, y-0) = (x+\gamma,\, y)\\ \vec{ME} = (x-\gamma,\, y-0) = (x-\gamma,\, y)\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{(x+\gamma)^2+y^2} + \sqrt{(x-\gamma)^2+y^2} = 2a$$

$$\Rightarrow (x+\gamma)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-\gamma)^2 - 4a\cdot\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{\gamma^2} + 2x\cdot\gamma + \cancel{y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} + \cancel{\gamma^2} - 2\gamma\cdot x + \cancel{y^2} - 4a\cdot\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$x\cdot\gamma = a^2 - a\cdot\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2} \Rightarrow a - \frac{\gamma}{a}x = \sqrt{(x-\gamma)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$a^2 - \cancel{2\gamma\cdot x} + \frac{\gamma^2}{a^2}x^2 = x^2 - \cancel{2\gamma x} + \gamma^2 + y^2 \Rightarrow \frac{a^2-\gamma^2}{a^2}\cdot x^2 + y^2 = a^2 - \gamma^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-\gamma^2} = 1 \quad \text{με} \quad \beta^2 = a^2 - \gamma^2$$

http://www.tanenghong.com

Παρατηρησεις

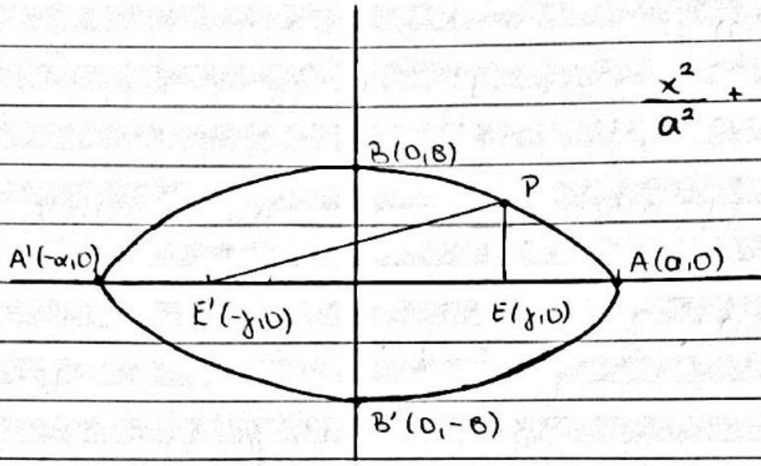
① Τα E, E' λεγονται εστιες της ελλειψης

② Το O λεγεται κεντρο της ελλειψης

③ Η ελλειψη τεμνει τον $x'x$ στα $A(\alpha,0)$ και $A'(-\alpha,0)$

τον $y'y$ στα $B(0,\beta)$ και $B'(0,-\beta)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$



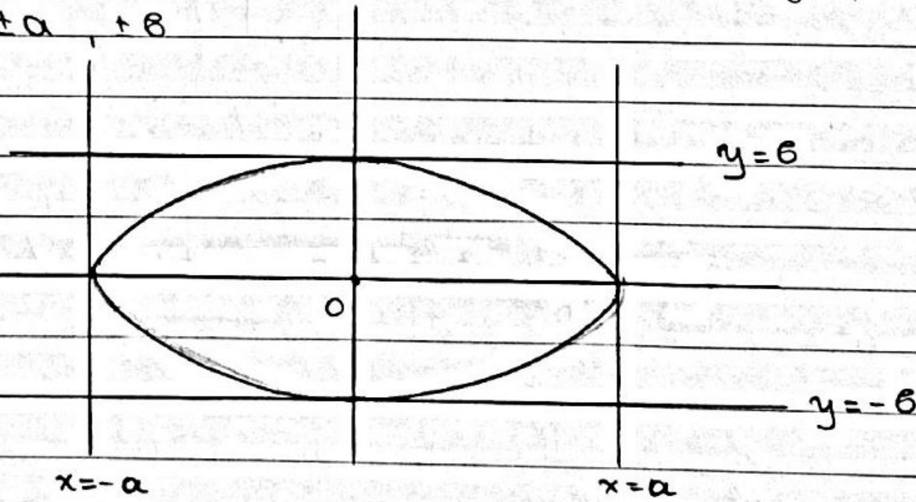
Αν $P(x,y)$ τυχαιο σημειο της $\Rightarrow$ $\vec{PE'}$, $\vec{PE}$ λεγονται εστιακες ακτινες

✱ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1 \Rightarrow \left|\dfrac{x}{a}\right|<1$ και $\left|\dfrac{y}{\beta}\right|<1$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$-a<x<a \qquad -\beta<y<\beta$$

✱ Μια ελλειψη βρισκεται σε ορθογωνιο παραλληλογραμμο με πλευρες $\pm\alpha$, $\pm\beta$



No. Date

(*) Αν $\gamma = 0 \Rightarrow a^2 - \gamma^2 = b^2 \Rightarrow a^2 = b^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$

{ Ο κυκλος ειναι μια ειδικη μορφη ελλειψης }

Ειδικοτερα οταν $\gamma \to 0 \Rightarrow$ τα $E, E' \to O$.

Ο λογος $\frac{|\vec{OE}|}{|\vec{OA}|} = \frac{\gamma}{a} = \varepsilon$ λεγεται εκκεντροτητα της ελλειψης και μας δειχνει κατα ποσο μια ελλειψη → κυκλος

Προφανως $0 < \varepsilon < 1$

→ Αν $\varepsilon = 0$ → εχουμε κυκλο → Ταυτιση

→ Αν $\varepsilon = 1$ → $\gamma = a$ → $E = A$, $E' = A'$ εχουμε ευθεια xx'

$\Downarrow$

$b = 0$

{ Η ευθεια ειναι μια οριακη θεση ελλειψης }

{
Εγκυκλοπαιδικα

Πλουτωνας $0,250 = \varepsilon$ [ελλειψη]

Ποσειδωνας $0,00(0)5 = \varepsilon$ [πιο κυκλικη]

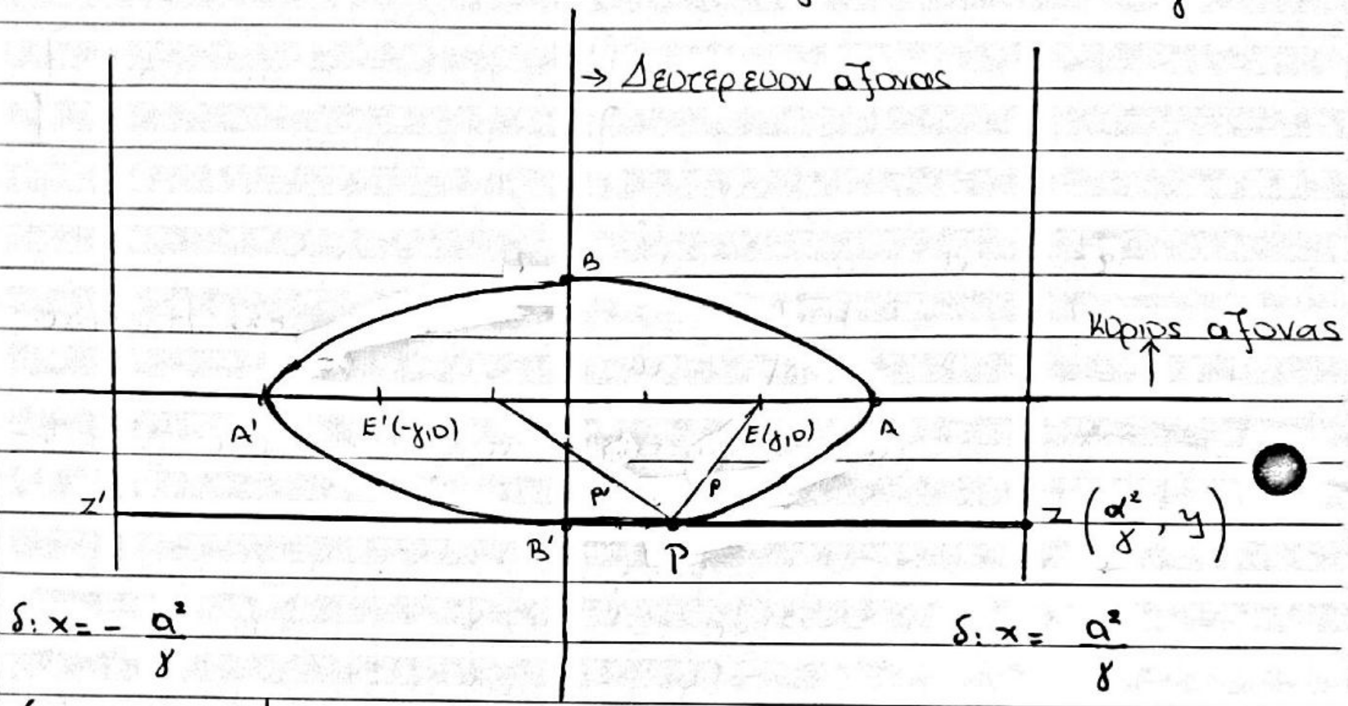
Γη $0,017$ [ειναι σχεδον κυκλος]
}

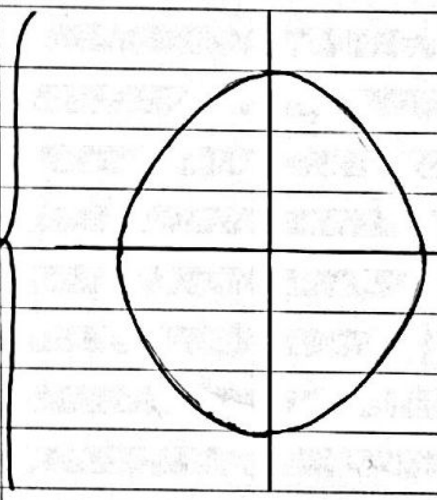
http://www.tanenghong.com

No. Date

Διευθετουσες Ελλειψης

Οριζονται ως οι ευθειες $\delta': x = -\dfrac{a^2}{\gamma}$ και $\delta: x = \dfrac{a^2}{\gamma}$





Οταν εχω την ελλειψη στον $y'y$ αλλαζουν ρολο μονο τα x και y:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

Θεωρημα

Ο λογος των αποστασεων τυχοντος σημειου $P(x,y)$ μιας ελλειψης απο την εστια E (αντιστοιχα E') προς την αντιστοιχη διευθετουσα δ (αντιστοιχα δ') ειναι σταθερος και ισος με την εκκεντροτητα της ελλειψης

$$\frac{|\vec{PE}|}{|\vec{PZ}|} = \varepsilon \left(= \frac{|\vec{PE'}|}{|\vec{PZ'}|} \right)$$

http://www.tanenghong.com

Αποδειξη

$\vec{PE} = (\gamma - x, 0 - y) = (\gamma - x, -y) \Rightarrow |\vec{PE}| = \sqrt{(\gamma - x)^2 + y^2} = \rho$

$\vec{PZ} = \left(\frac{a^2}{\gamma} - x, 0\right) \Rightarrow |\vec{PZ}| = \sqrt{\left(\frac{a^2}{\gamma} - x\right)^2} = \frac{a^2}{\gamma} - x$

$\vec{PE'} = (-\gamma - x, 0 - y) = (-\gamma - x, -y) \Rightarrow |\vec{PE'}| = \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = \rho'$

Ισχυει $\rho + \rho' = 2a$ (2)

$(\rho')^2 - \rho^2 = 4\gamma x \Rightarrow (\rho' - \rho)\cdot(\rho' + \rho) = 4\gamma x$ (2)

$(\rho' - \rho)\cdot 2a = 4\gamma x \Rightarrow \rho' - \rho = \frac{2\gamma x}{a}$ (1)

Απο (1) και (2) εχουμε

$2\rho' = \frac{2\gamma x}{a} + 2a \Rightarrow \rho' = a + \frac{\gamma x}{a}$

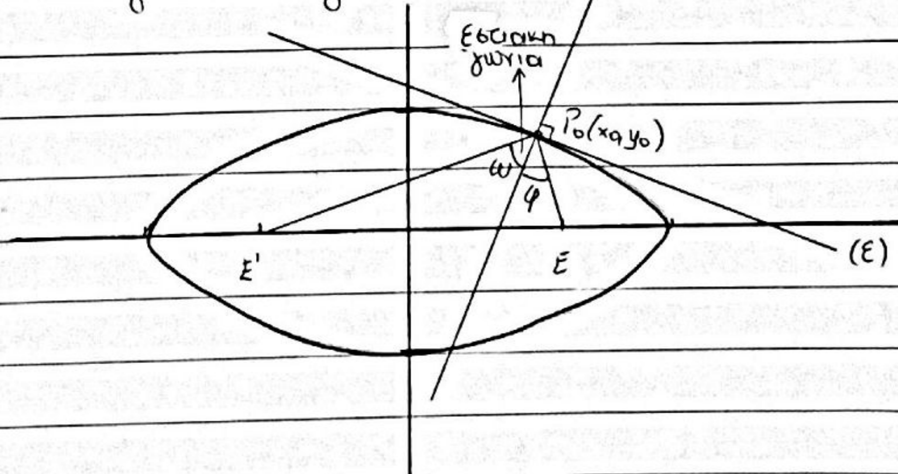
(2) − (1) $\Rightarrow 2\rho = 2a - \frac{2\gamma x}{a} \Rightarrow \rho = a - \frac{\gamma x}{a}$

Οποτε

$$\frac{|\vec{PE}|}{|\vec{PZ}|} = \frac{a - \frac{\gamma x}{a}}{\frac{a^2}{\gamma} - x} = \frac{\frac{a^2 - \gamma x}{a}}{\frac{a^2 - \gamma x}{\gamma}} = \frac{\gamma}{a} = \varepsilon$$

Θεωρημα

Η καθετος της επαφης σε τυχαι σημειο αυτης P_0 διχοτομει την εστιακη γωνια (ή γωνια εστιακων ακτινων)



No. Date

(*) Ειναι γνωστο οτι η εξισωση της εφαπτομενης της ελλειψης σε τυχαιο σημειο $P_0(x_0, y_0)$ ειναι:

$$(\varepsilon) \quad \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

Το διανυσμα $\vec{n}\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right) \perp (\varepsilon)$ και $\overrightarrow{P_0E'} = (-x_0-\gamma, -y_0)$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{P_0E'}, \vec{n}) = \cos\omega = \frac{\langle \overrightarrow{P_0E'}, n \rangle}{|\overrightarrow{P_0E'}| \cdot |\vec{n}|}$$

Αντιστοιχα $\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{P_0E}, \vec{n}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \omega = \varphi$

Παραδειγμα

Να βρεθει η εξισωση της ελλειψης με εκκεντροτητα $\varepsilon = \frac{2}{3}$ μια εστια στο $(4, -3)$ και αντιστοιχη διευθετουσα την $x = -1$

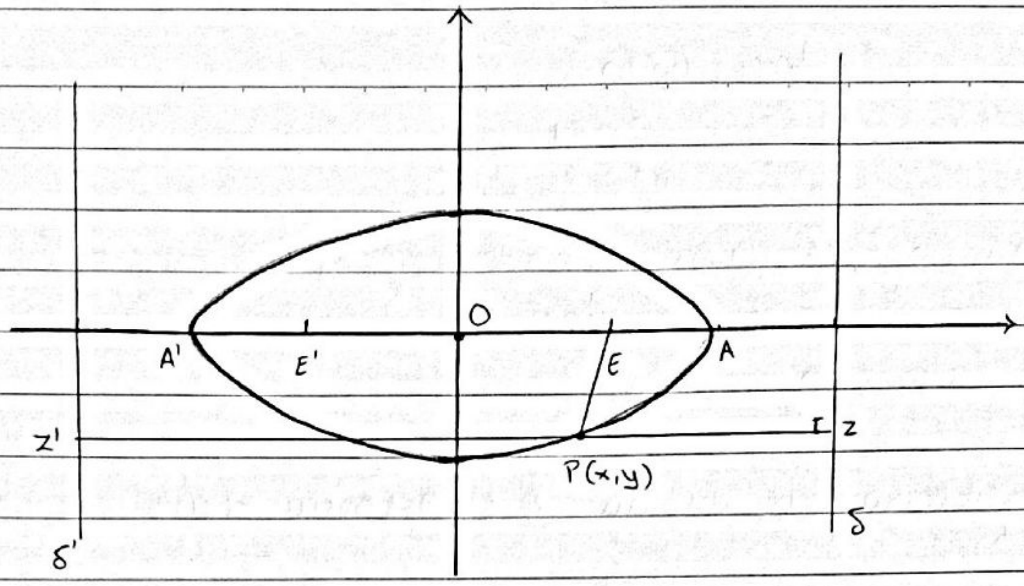
Εστω τυχαιο σημειο $P(x, y) \Rightarrow \frac{d(P, E)}{d(P, Z)} = \varepsilon = \frac{2}{3} \Rightarrow$

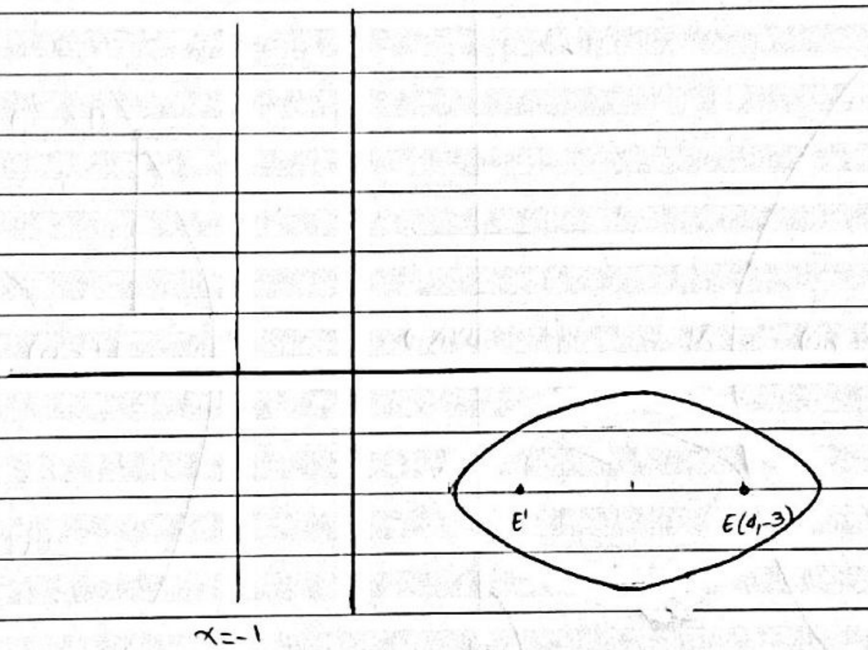
$$\frac{\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2}}{\sqrt{(x+1)^2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2}}{|x+1|} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2} = \frac{2}{3} \cdot |x+1| \Rightarrow \frac{(x-8)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{20} = 1$$

κεντρο $\rightarrow (8, -3)$

http://www.tanenghong.com





http://www.tanenghong.com

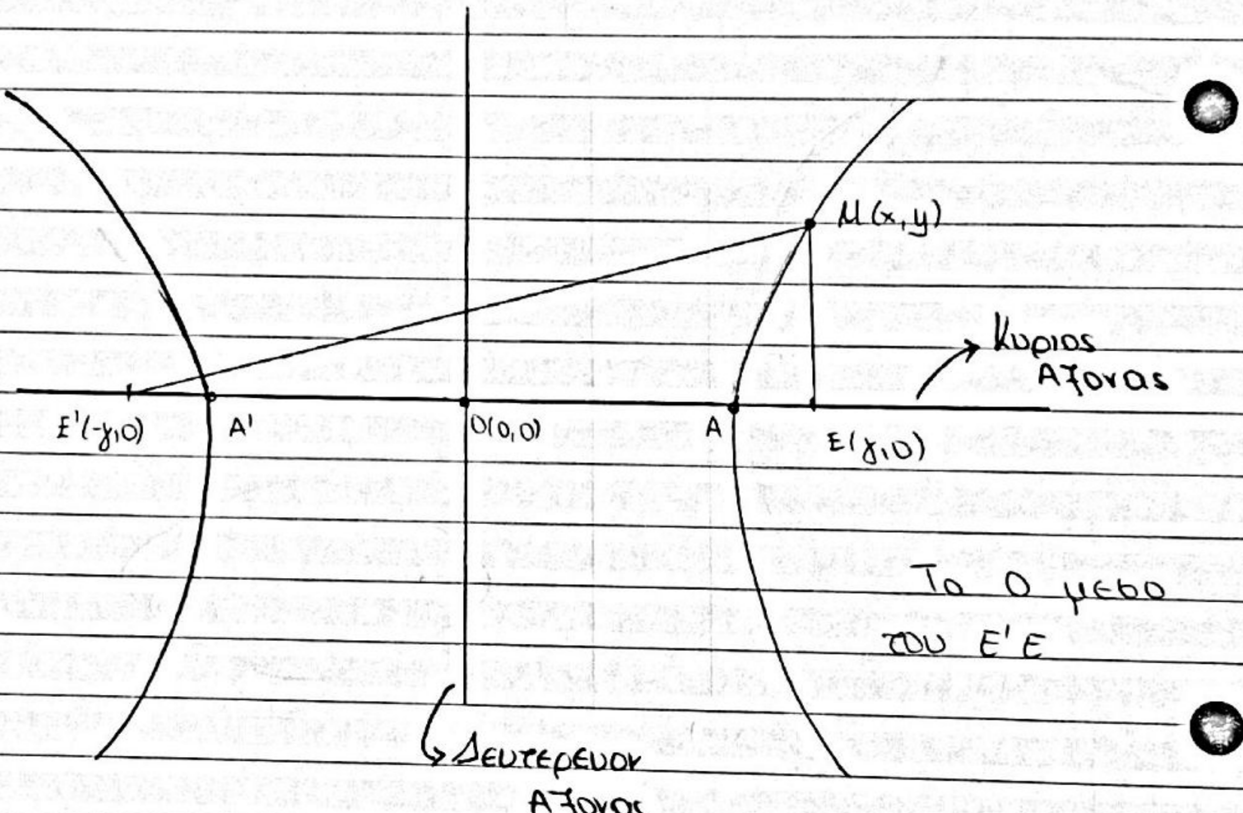
No. Date

Υπερβολη

- Εξισωση: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

- Ειναι ο γεωμετρικος τοπος των σημειων των οποιων η απολυτη τιμη της διαφορας των αποστασεων απο δυο σταθερα σημεια ειναι σταθερη

Αντιστοιχα τα σημεια Ε, Ε' λεγονται εστιες της υπερβολης

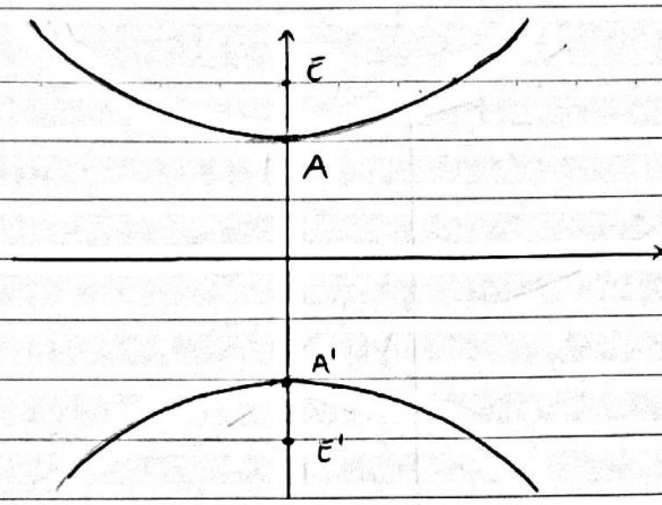


Εστω $M(x,y)$ τυχον σημειο της υπερβολης $\Rightarrow \boxed{\left||\vec{E'M}| - |\vec{EM}|\right| = 2a}$
με $\vec{E'M} = (x+\gamma, y) \Rightarrow |\vec{E'M}| = \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}$ και
$\vec{EM} = (x-\gamma, y) \Rightarrow |\vec{EM}| = \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}$ τοτε εχουμε την
Εξισωση : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\gamma^2 - a^2} = 1$ θετουμε $\beta^2 = \gamma^2 - a^2$ και

εχουμε την γνωστη εξισωση της υπερβολης

http://www.tanenghong.com

No. Date



Οταν εχω την υπερβολη στον y'y δεν αλλαζει τιποτα μονο τα x, y

Παρατηρησεις

① Τεμνει τον αξονα x'x στα σημεια $A(\alpha, 0)$, $A'(-\alpha, 0)$

② ΔΕΝ τεμνει πουθενα τον y'y
[$x=0 \Rightarrow -y^2 = \beta^2$ αδυνατον (για $y \neq 0$)]

③ Τα A, A' λεγονται κορυφες της υπερβολης, ο αξονας A'A λεγεται αξονας της υπερβολης, τα E, E' λεγονται εστιες, αν P τυχαιο σημειο της υπερβολης $\Rightarrow \overrightarrow{PE}, \overrightarrow{PE'}$ εστιακες ακτινες και η ποσοτητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$ οριζεται ως εκκεντροτητα της υπερβολης και $\varepsilon > 1$

Παραδειγμα

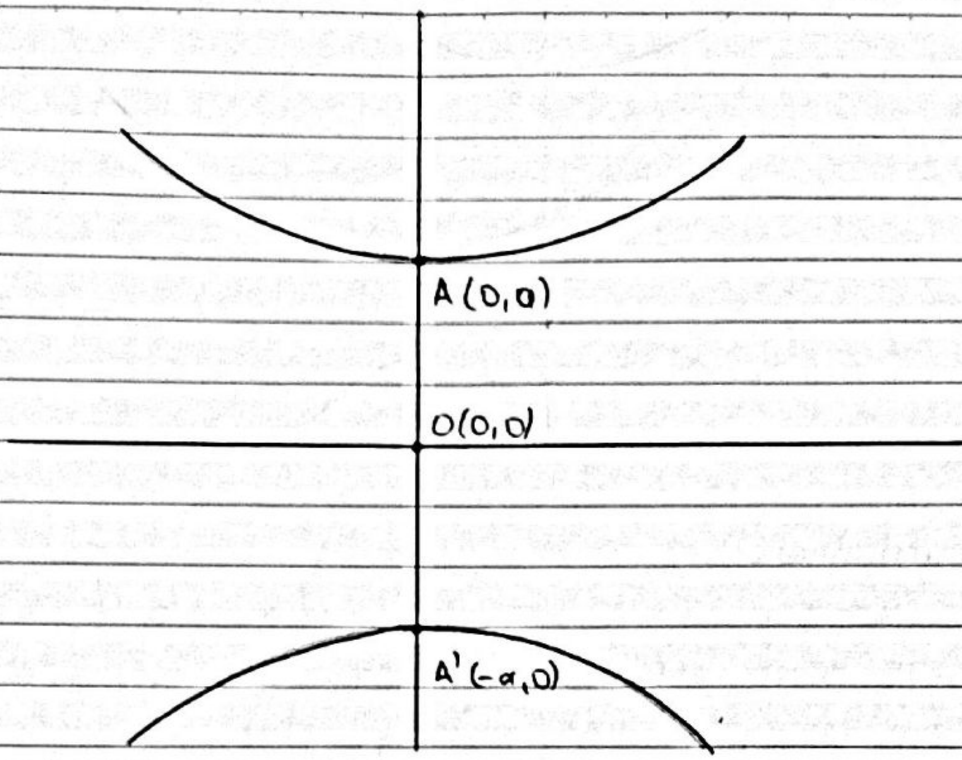
Να βρεθει η υπερβολη με κεντρο την αρχη των αξονων, μια κορυφη το σημειο (0, 5) και $\varepsilon = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$\Downarrow$

η εξισωση ειναι της μορφης:

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \quad \{\text{αφού η υπερβολη στον } y'y\}$$

http://www.tanenghong.com



$(0,5) \Rightarrow a=5$

$\varepsilon = \frac{\sqrt{29}}{5} \Rightarrow \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{29}}{5} \Rightarrow \gamma = \sqrt{29}$

και $\beta^2 = \gamma^2 - a^2 \Rightarrow \beta^2 = 29-25 \Rightarrow \beta = 2$

Άρα $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$

http://www.tanenghong.com